

Estudo de Funções

Funções módulo, exponencial e logarítmica

1. Considere as funções $f(x) = -x - 4$, $g(x) = -1 + |f(x)|$ e $h(x) = |-1 + f(x)|$.
 - a) Defina analiticamente as funções g e h . Represente-as geometricamente;
 - b) Determine os zeros da função g ;
 - c) Resolva a equação $g(x - 1) + h(-8 - x) = 5$.
2. Sabendo que $k = \log_a(c)$, determine em função de k :
 - a) $\log_{\sqrt{a}}(c)$
 - b) $\log_{\frac{1}{a}}(c)$
 - c) $\log_a\left(\frac{c}{a}\right)$
 - d) $\log_a(\sqrt{a} \cdot c^2)$
 - e) $\log_a\left(\frac{1}{c}\right)$
3. Resolva as equações:
 - a) $\log_3(x + 2) = 1 - \log_3(x)$
 - b) $2\log_2(x + 1) - \log_2(x + 4) + 1 = 0$
4. Considere a função $f(x) = -1 + 2^{x-1}$.
 - a) Determine o domínio e o contradomínio da função f ;
 - b) Determine uma expressão analítica da função inversa f^{-1} .
5. Considere a função $g(x) = \log_2\left(\frac{8}{(1-x)^3}\right)$.
 - a) Simplifique a expressão analítica da função, utilizando propriedades da função logarítmica;
 - b) Determine uma expressão analítica da função inversa g^{-1} ;
 - c) Calcule o domínio e o contradomínio das funções g e $h(x) = 3 - |g(x)|$.

Funções trigonométricas directas e inversas

6. Calcule

a) $\sec\left(\frac{\pi}{4}\right)$

b) $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

c) $\cotg\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

d) $\arcsen\left(\frac{1}{2}\right)$

e) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

f) $\operatorname{arctg}(\sqrt{3})$

g) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

h) $\operatorname{arccotg}(-1)$

i) $\arcsen\left(\sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

j) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

k) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{8\pi}{9}\right)\right)$

7. Determine o domínio e o contradomínio das funções

a) $f(x) = -1 - 2\cos\left(\frac{x}{4}\right)$

b) $f(x) = -3 + |\operatorname{tg}(4x)|$

c) $f(x) = 2 - \left|5\sen\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right|$

d) $f(x) = -2\arcsen(1 - x)$

e) $f(x) = -\frac{\pi}{2} - 3\operatorname{arccotg}(2x)$

f) $f(x) = \frac{\pi}{4} - |\operatorname{arctg}(x)|$

g) $f(x) = \frac{\pi}{6} - 4\arccos\left(\frac{x}{3}\right)$

8. Considere a função $f(x) = \frac{\pi}{3} - 2\arccos(2 - x)$.

a) Determine o domínio e o contradomínio da função;

b) Determine uma expressão analítica da função inversa f^{-1} .

9. Considere a função $g(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x - 1)$.

a) Determine o domínio e o contradomínio da função;

b) Determine uma expressão analítica da função inversa g^{-1} .

Soluções

Funções módulo, exponencial e logarítmica

$$1. \text{ a) } g(x) = \begin{cases} -x - 5, & x \leq -4 \\ x + 3, & x > -4 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} -x - 5, & x \leq -5 \\ x + 5, & x > -5 \end{cases}$$

b) $x = -5 \vee x = -3$

c) $x = -6 \vee x = 0$

2. a) $2k$

c) $k - 1$

e) $-k$

b) $-k$

d) $\frac{1}{2} + 2k$

3. a) $x = 1$

b) $x = \frac{1}{2}$

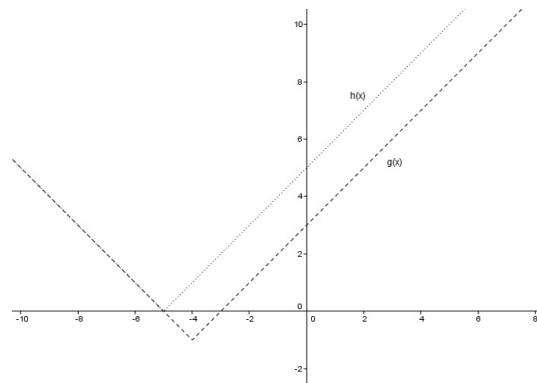
4. a) $D = \mathbb{R}, D' =] - 1, +\infty[$

b) $f^{-1}(y) = 1 + \log_2(y + 1)$

5. a) $g(x) = 3 - 3 \log_2(1 - x)$

b) $g^{-1}(y) = 1 - 2^{1-\frac{y}{3}}$

c) $D_g =] - \infty, 1[, D'_g =] - \infty, +\infty[$
 $D_h =] - \infty, 1[, D'_h =] - \infty, 3]$



Funções trigonométricas directas e inversas

6. a) $\sqrt{2}$

d) $\frac{\pi}{6}$

g) $-\frac{\pi}{6}$

j) $\frac{\pi}{3}$

b) -2

e) $\frac{2\pi}{3}$

h) $\frac{3\pi}{4}$

k) $-\frac{\pi}{9}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

f) $\frac{\pi}{3}$

i) $\frac{\pi}{6}$

7. a) $D = \mathbb{R}, D' = [-3, 1]$

e) $D = \mathbb{R}, D' = \left] -\frac{7\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right[$

b) $D = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\},$
 $D' = [-3, +\infty[$

f) $D = \mathbb{R}, D' = \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[$

c) $D = \mathbb{R}, D' = [-4, 2]$

g) $D = [-3, 3], D' = \left[-\frac{23\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right]$

d) $D = [0, 2], D' = [-\pi, \pi]$

8. a) $D = [1, 3], D' = \left[-\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right]$

b) $g^{-1}(y) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{y}{2}\right)$

9. a) $D = \mathbb{R}, D' = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

b) $g^{-1}(y) = 1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right)$